22/05/2018

Οι Διαφορική Γεωμετρία

Υπενθύμιση: Σύστημα γεωδαισιακών πολικών συντεταγμένων (ορίστηκε μέσω του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων)

$$X(\rho,\theta) = \exp_p(\rho\cos\theta e_1 + \rho\sin\theta e_2)$$

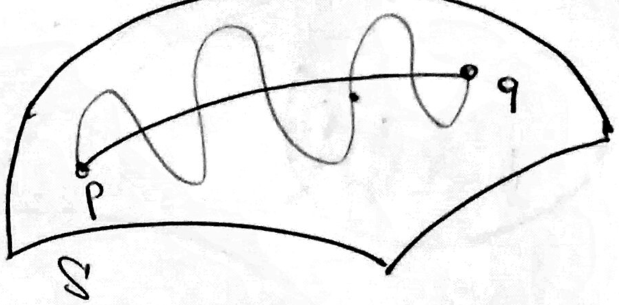
Το ρ δεν επιτρέπεται να πάρει την τιμή 0 άρα υπάρχει πρόβλημα στο $\rho=0$

Πρόταση: $E=1,\ F=0 \rightarrow \lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}(\rho,\theta)=0$.

$\downarrow$

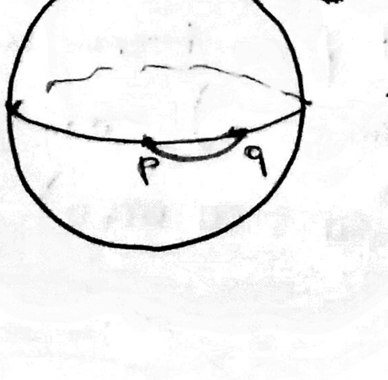
$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho(\rho,\theta)=1$.

Είπαμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους πάνω σε μία επιφάνεια:



Ελαχιστοποιούν οι γεωδαισιακές το μήκος; Όχι

Αντιπαράδειγμα: Αν πάρουμε την σφαίρα



Η γεωδαισιακή που "πηγαίνει" από πίσω είναι και πάλι μεγαλύτερη. Άρα δεν ελαχιστοποιείται.

Θεώρημα: (Οι γεωδαισιακές μιας επιφάνειας ΤΟΠΙΚΑ ελαχιστοποιούν το μήκος)

Για κάθε σημείο $p \in S$, $\exists$ κανονική περιοχή W του p:

$\forall q \in W \wedge \gamma : [0,\ell] \to W$ ακτινική γεωδαισιακή με

$\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$, ισχύει:

$L(c) \geq L(\gamma)$ όπου $c : [0,\ell] \to S$

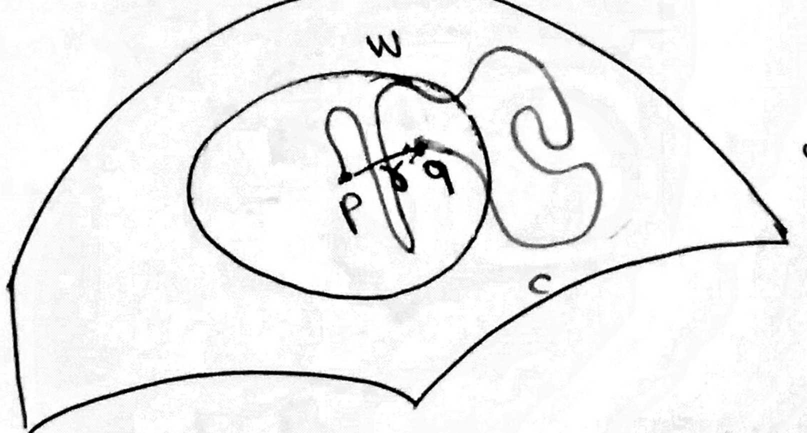
είναι καμπύλη της S με $c(0) = p$

και $c(\ell) = q$. Επιπλέον η ισότητα

ισχύει αν η c είναι γεωδαισιακή με κατάλληλη παραμέτρηση

και $c([0,\ell]) = \gamma([0,\ell])$

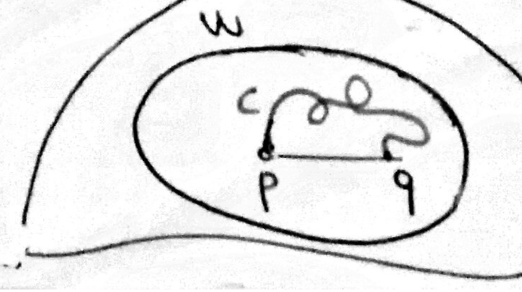
Η γ ενώνει το κέντρο της περιοχής με το τυχόν σημείο q.



Απόδειξη: Θεωρούμε κανονική περιοχή V του σημείου p και W είναι ανοικτή γεωδαισιακή μπάλα ώστε $W \subset V$

($1^η$ περίπτωση) Υποθέτω ότι $c(0,\ell) \subset W$ (άρα μπορώ να την παραμετρήσω με το σύστημα που έχω στο W) και γράφεται

$c(t) = X(\rho(t), \theta(t))$ $t \in (0,\ell)$ (χωρίς τα άκρα)



Γνωρίζω ότι $L(c)=\int_0^{\ell} \|c'(t)\|dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{\ell-\varepsilon} \|c'(t)\|dt$ (*)

θ = σταθ
άρα είναι
ακτινική
γεωδαισιακή
η
ταίνωση

Άρα, $\forall t\in[\varepsilon,\ell-\varepsilon]$ έχω $c(t)=X(\rho(t),\theta(t))$ $\Rightarrow$

$$\rightarrow c'(t)=\rho'(t)X_{\rho}(\rho(t),\theta(t))+\theta'(t)X_{\theta}(\rho(t),\theta(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|c'(t)\|^2=(\rho'(t))^2\underbrace{\|X_{\rho}(\dots)\|^2}_{E}+2\rho'(t)\theta'(t)\langle X_{\rho}(\dots),X_{\theta}(\dots)\rangle+$$
$$+(\theta'(t))^2\|X_{\theta}(\dots)\|^2.$$

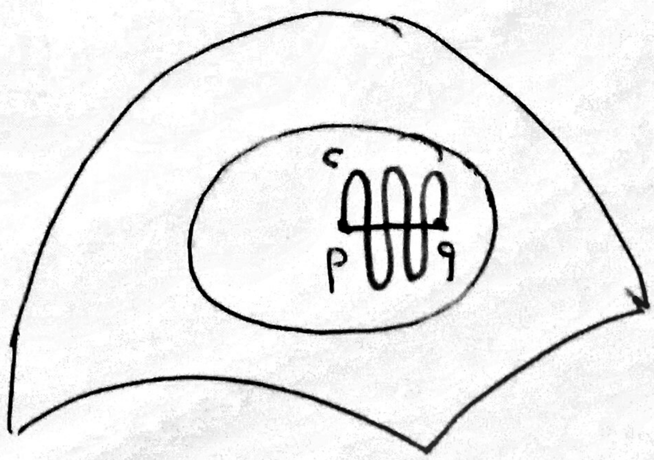
$$\forall t\in[\varepsilon,\ell-\varepsilon]:\ \|c'(t)\|^2=(\rho'(t))^2+(\theta'(t))^2 G(\rho(t),\theta(t))\geq(\rho'(t))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|c'(t)\|\geq|\rho'(t)|\geq\rho'(t)\quad\forall t\in[\varepsilon,\ell-\varepsilon].\ ①$$ (Βάζω στο ① ολοκλήρ.)

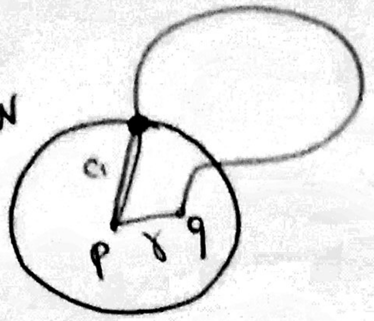
$$(*) \overset{①}{\Rightarrow} \int_{\varepsilon}^{\ell-\varepsilon}\|c'(t)\|dt\geq\int_{\varepsilon}^{\ell-\varepsilon}\rho'(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\ell-\varepsilon}\|c'(t)\|dt\geq\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\ell-\varepsilon}\rho'(t)dt=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\rho(\ell-\varepsilon),\rho(\varepsilon)\right)=$$
$$=\rho(\ell)=L(\gamma)$$

2η περίπτωση) $C(0,\ell)\subset W$



(3η περίπτωση) Η c "δεν τέμνει" την γ και βγαίνει εκτός σφαίρας.

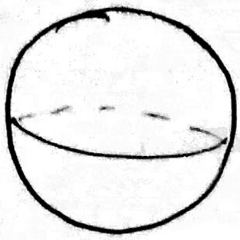


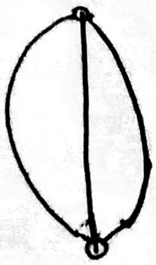
$L(c) \geq L(c_1) \geq \rho_0 \geq L(\gamma)$.

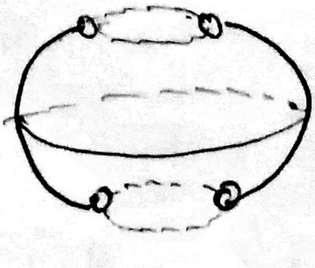
Στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους επομένως για να το λύσουμε θα ψάξαμε σε γεωδαισιακές.
όμως δεν ισχύει το αντίστροφο, ότι κάθε γεωδαισιακή ελαχιστοποιεί το μήκος (το δείξαμε με αντιπαράδειγμα την σφαίρα).

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΗ ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ GAUSS.

1. Οι σφαιρικές



2.  χωρίς το άνω και κάτω σημείο

3. 

Σταθερή και αρνητική K_{gauss} το τρομπόνι
Στο στόμιο δεν εί
εφαπτόμενη ιδέα
όχι συμπαγές.

<u>Ερώτημα</u>: υπάρχουν άλλες συμπαγείς επιφάνειες με σταθερή Gauss (θετική) εκτός από τις σφαίρες;

Με σταθερή αρνητική K_G δεν έχουμε συμπαγείς

Δεν υπάρχει ισομετρία η οποία παραμορφώνει τη σφαίρα και μας δίνει άλλη επιφάνεια. Είναι άκαμπτες, δεν επιδέχεται παραμορφώσεις.

δεν λέει καμία θετική αλλά ίδια σταθερή

Η απάντηση είναι το επόμενο θεώρημα:

<u>Θεώρημα (Liebmann 1898)</u>: Οι μόνες συμπαγείς επιφάνειες με σταθερή καμπυλότητα Gauss είναι οι σφαίρες.

- Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα χρειαστεί το επόμενο λήμμα:

<u>Λήμμα</u>: Έστω p σημείο κανονικής επιφάνειας S με καμπυλότητα Gauss $K(p)>0$. Υποθέτω ότι στο p η κύρια καμπυλότητα k_1 λαμβάνει μέγιστο, ενώ η κύρια καμπυλότητα k_2 λαμβάνει ελάχιστο. Τότε το σημείο p είναι ομφαλικό.

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί νδο $k_1(p)=k_2(p)$. Θα εφαρμόσουμε την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτω ότι $k_1(p)>k_2(p)$, λόγω συνέχειας όμως των k_1,k_2) έχω ότι $k_1>k_2$ σε μια περιοχή του σημείου p.

(αυτή είναι η συνθήκη για να δέχεται ένα σύστημα γραμμές καμπυλότητας)

Επειδή, λοιπόν, $k_1>k_2$, μπορώ να επιλέξω γύρω από το p, σύστημα συντεταγμένων με $F=0=f$

Είναι: $K=k_1\cdot k_2=\dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}=\dfrac{e}{E}\cdot\dfrac{g}{G}$

$$H=\frac{k_1+k_2}{2}=\frac{Eg-2Ff+Ge}{2(EG-F^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{E}+\frac{g}{G}\right) \Rightarrow$$

Δεν ισχύει πάντα ότι μπορώ να πάρω σύστημα. Αλλά εδώ μπορούμε $k_1>k_2$ και είναι θεώρημα του προγράμματος καθηγητός.

ε, $\Rightarrow \{k_1, k_2\} = \left\{\frac{e}{E}, \frac{g}{G}\right\}$ → το γράφω έτσι γιατί δεν γνωρίζω ποιά είναι η μεγαλύτερη.

ν

Υποθέτω ότι $\boxed{k_1 = \frac{e}{E}, \; k_2 = \frac{g}{G}}$ $\left(\Rightarrow e = k_1 E \wedge g = k_2 \cdot G\right)$

οι k_1, k_2 ορίζονται πάνω στην επιφάνεια όμως μπορώ να τις δω μέσω του συστήματος συντεταγμένων

- οι εξισώσεις M-G →

$$\begin{cases} ① \; e_v = \frac{E_v}{2}(k_1+k_2) \\ ② \; g_u = \frac{G_u}{2}(k_1+k_2) \end{cases}$$

$$(k_1)_v = \left(\frac{e}{E}\right)_v = \frac{1}{E^2}\left(E e_v - e E_v\right) \; ①$$

$$= \frac{1}{E^2}\left\{E \cdot \frac{E_v}{2}(k_1+k_2) - k_1 E E_v\right\} =$$

$$= \frac{E E_v}{E^2}\left\{\frac{k_1+k_2}{2} - k_1\right\} \Rightarrow (k_1)_v = \boxed{\frac{E_v}{2E}(k_2-k_1)} \; ⓐ$$

η παράγωγος του k_1 ως προς v

Ομοίως, βρίσκω $\boxed{(k_2)_u = \frac{G_u}{2G}(k_1-k_2)}$ ⓑ $\left(\text{ΤΡΙΚ αντικαθιστώ το } g \text{ με } k_2 \cdot G\right)$

$$ⓐ \Rightarrow E(k_1)_v = \frac{E_v}{2}(k_1-k_2) \;\wedge\; ⓑ \Rightarrow G(k_2)_u = \frac{G_u}{2}(k_1-k_2) \rightarrow$$

ε) Δεν έχω λάβει υπόψιν μου την 3η συνθήκη (το έξοχο θεώρημα Gauss)

2) Είναι ορθογώνιο το σύστημα συντεταγμένων

→ Από το έξοχο Θεώρημα και $F=0$ →

$$\Rightarrow K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}$$

Αν παραγωγίσω, θα έχω στον αριθμητή:

$$-2\sqrt{EG}\cdot K = \frac{E_{vv}}{\sqrt{EG}} + E_v\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\right)_v + \frac{G_{uu}}{\sqrt{EG}} + G_u\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\right)_u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2EGK = E_{vv} + G_{uu} + ME_v + NG_u. \quad (*)$$

$$(*) \xRightarrow[(\beta)]{(\alpha)} 2\left(\frac{E(k_1)_v}{k_2-k_1}\right)_v + 2\left(\frac{G(k_2)_u}{k_1-k_2}\right)_u + \frac{2ME}{k_2-k_1}(k_1)_v + \frac{2NG}{k_1-k_2}(k_2)_u$$

$$\Leftrightarrow -2EGK = \frac{2E\cdot(k_1)_{vv}}{k_2-k_1} + \frac{2G(k_2)_{uu}}{k_1-k_2} + \tilde{M}(k_1)_v + \tilde{N}(k_2)_u$$

Τώρα θα εκτιμήσω αυτήν την ισότητα στο p όπου η k_1 λαμβάνει μέγιστο η η k_2 ελάχιστο.

Έχουμε:

$$\underbrace{-2EGk(p)}_{<0} = \underbrace{\underbrace{\frac{2E}{k_2-k_1}}_{<0}\underbrace{(k_1)_{vv}}_{\leq 0}}_{>0} + \underbrace{\frac{2G}{k_1-k_2}}_{>0}\underbrace{(k_2)_{uu}}_{\geq 0}.$$

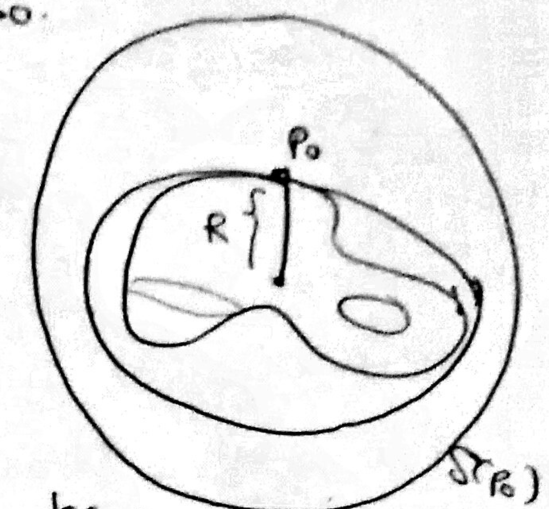
Άρα δεν γίνεται να έχουμε αρνητικός = θετικός ⇒ Άτοπο

$\Rightarrow k_1(p) = k_2(p) \Rightarrow p$ ομφαλικό

Απόδειξη Θεωρήματος Liebmann:

Έστω S συμπαγής επιφάνεια με σταθερή καμπυλότητα Gauss K.
Ισχυρίζομαι ότι $K>0$ γιατί ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

<u>Πρόταση</u>: Κάθε συμπαγής επιφάνεια έχει ένα σημείο ελλειπτικό δηλ. σημείο όπου $K>0$.



$k(p_0) \geq k_S(p_0) = \frac{1}{R^2} > 0.$

$K = k_1 k_2$, $k_1, k_2 : S \to \mathbb{R}$ συνεχείς

Επειδή S συμπαγής και k_1 συνεχής υπάρχει $p \in S$ ώστε $k_1(p) = \max_S k_1$

$0 < K = k_1 k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{K}{k_1}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η k_2 παρουσιάζει ελάχιστο στο p.

Άρα πληρούνται οι προϋποθέσεις του λήμματος $\Rightarrow$ p ομφαλικό $\to$
$\to k_1(p) = k_2(p)$.

Εμείς όμως θέλουμε νδο <u>όλα</u> τα σημεία είναι ομφαλικά για να έχουμε σφαίρα.

Θεωρούμε τυχόν $q \in S$

$k_1(q) \leq \max_S k_1 = k_1(p) = k_2(p) = \min_S k_2 \leq k_2(q) \to$

$\Rightarrow k_1(q) \leq k_2(q)$
όμως $k_1(q) \geq k_2(q)$
$\Rightarrow k_1(q) = k_2(q)$

άρα το τυχαίο σημείο $q \in S$ είναι ομφαλικό

Άρα είναι τμήμα σφαίρας. Όμως λόγω συμπαγότητας δεν είναι απλά τμήμα, είναι ολόκληρη η σφαίρα.

Θεώρημα: Έστω S συμπαγής επιφάνεια με $K_{Gauss} > 0$ (παντού)
Αν η S έχει σταθερή μέση καμπυλότητα $H = \text{σταθ.}$, τότε είναι η σφαίρα.

Απόδειξη: (θα χρειαστούμε το προηγούμενο λήμμα)
Η $k_1 : S \to \mathbb{R}$ ως συνεχής συνάρτηση σε (συμπαγές σύνολο) συμπαγή επιφάνεια λαμβάνει μέγιστο στο p.

$H = \frac{k_1+k_2}{2} \Rightarrow k_2 = 2H - k_1$ (με H σταθ) $\Rightarrow$ Στο p η k_2 λαμβάνει ελάχιστο.

Σε κάθε σημείο $K>0$ άρα από το λήμμα $\Rightarrow$
$\Rightarrow k_1(p) = k_2(p)$

Ομοίως με πριν δείχνουμε ότι είναι η σφαίρα λόγω συμπαγότητας.

Θεώρημα: Έστω S συμπαγής επιφάνεια με $K_G>0$. Αν υπάρχει φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τω $k_2 = f(k_1)$, τότε η S είναι σφαίρα.

! Παρατήρηση: Από το θεώρημα Gauss-Bonnet γνωρίζω ότι

$$\iint_S K\,dS = 2\pi\chi(S)$$

Αν $K>0 \Rightarrow \chi(S) > 0 \Rightarrow S$ ομοιομορφική με S^2

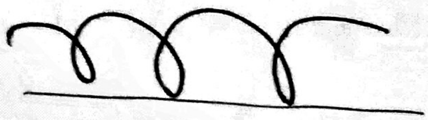
▶ Ερώτημα: Αν S ομοιόμορφη με τη σφαίρα και έχει σταθερή μέση καμπυλότητα είναι σφαίρα;;

Προφανώς και συμπαγής αφού οι ομοιομορφ. διατηρούν τις τοπολογικές ιδιότητες

Θεώρημα Hopf: ΝΑΙ

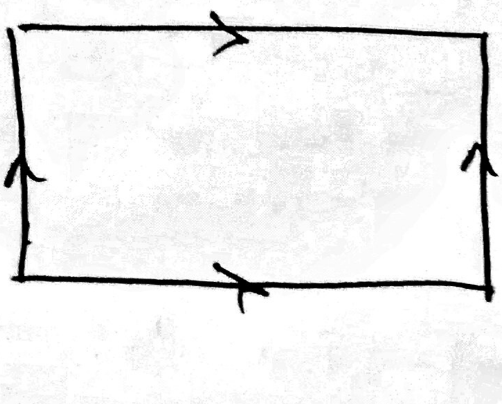
▶ Μιλάμε πάντα για κανονικές επιφάνειες (χωρίς αυτοτομές δηλ).

▶ Επιφάνεια με αυτοτομές για παράδειγμα είναι αν πάρω την καμπύλη →



και την στρέψω γύρω από έναν άξονα, θα προκύψει επιφάνεια με αυτοτομές.

ΤΕΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ. - ΘΕΩΡΙΑ.



→ τόρος.

Ασκήσεις

① Αποδείξτε ότι αν όλες οι γεωδαισιακές μιας συνεκτικής κανονικής επιφάνειας S είναι επίπεδες, τότε η S είναι τμήμα επιπέδου ή σφαίρας.

(Αρκεί να ο οι κύριες καμπυλότητες σε κάθε σημείο είναι ίσες ⟺ κάθε διάνυσμα σε αυτόν τη θέση είναι ιδιοδιάνυσμα της Weingarten ή αν η Weingarten είναι πολ/σιο της ταυτοτικής απεικόνισης.)

Θεωρώ τυχόν σημείο $p \in S$ και $u \in T_pS \setminus \{0\}$, $\|u\| = 1$. (Δηλαδή παράμετρος το μήκος τόξου)

Θεωρώ γεωδαισιακή $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ με

$\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = u$

Άρα η γ έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου (s).

Έχω: $\vec{t} = \dot{\gamma}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.

όμως γ επίπεδη $\Rightarrow \tau = 0 \xLeftrightarrow{\text{Frenet}} \dot{\vec{b}} = \vec{0}$

Η γ είναι γεωδαισιακή $\Leftrightarrow \dfrac{D\dot{\gamma}}{ds} = 0$ (συναλλοίωτη παράγωγος)

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{d\dot{\gamma}}{ds}\right)^{\tau} = 0 \Leftrightarrow \left(\ddot{\gamma}\right)^{\tau} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\gamma}(s) \parallel N(\gamma(s)) \ \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (*)

όπου $N: S \to S^2$ είναι η απεικόνιση Gauss της S:

$\dot{\gamma} = \vec{t}$, $\ddot{\gamma} = \dot{\vec{t}} = k\vec{n}$

(*) $\Leftrightarrow k(s)\vec{n}(s) \parallel N(\gamma(s)) \Rightarrow N\gamma(s)) = \pm \vec{n}(s) \quad \forall s \Rightarrow$

$\Rightarrow (N \circ \gamma)^{\cdot}(s) = \pm \dot{\vec{n}}(s) \Rightarrow dN_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = \pm(-k(s)\vec{t}(s) + \underbrace{\cancel{\tau(s)}}_{0}\vec{b}(s)) \Rightarrow$

$\Rightarrow -L_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = \mp k(s)\vec{t}(s) \Rightarrow L_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) = \pm k(s)\vec{t}(s) \quad \forall s \Rightarrow$

Για $s=0$ έχω: $L_p v = \pm k(0) v$ $\forall v \in T_pS$ και $\|v\|=1$ (άρα κάθε μοναδιαίο διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της απεικόνισης Weingarten.

$\Rightarrow L_p w = \pm k(0)\ \forall w \in T_pS \Rightarrow k_1(p) = \pm k(0) = k_2(p)$

Άρα από το θεώρημα $\Rightarrow$ τμήμα σφαίρας ή επιπέδου

---

② (i) Έστω c γραμμή καμπυλότητας επιφάνειας S. Αν είναι και γεωδαισιακή της S τότε δο η c επίπεδη.

(ii) Έστω c γεωδαισιακή της S και επίπεδη, τότε είναι γραμμή καμπυλότητας

(iii) Ισχύει c γραμμή καμπυλότητας και επίπεδη $\overset{??}{\Rightarrow}$ c γεωδαισιακή

(i) Έστω $c(s)$ με παράμετρο το μήκος τόξου.

➡ Γνωρίζουμε ότι c γραμμή καμπυλότητας $\xrightarrow{\text{Rodriges}}$

$\Rightarrow (N \circ c)^{\cdot}(s) = \lambda(s)\dot{c}(s)\ \forall s$ ⊛

➡ c γεωδαισιακή $\Rightarrow \ddot{c}(s) \,//\, (N\circ c)(s) \Rightarrow \ddot{c}(s) = \mu(s)(N\circ c)(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{t}(s) = \mu(s)(N\circ c)(s) \xRightarrow{\text{Frenet}} k(s)n(s) = \mu(s)(N\circ c)(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow (N\circ c)(s) = \pm n(s) \Rightarrow$ (τα n, $N\circ c$ μοναδιαία και ίδια διεύθυνση)

$\Rightarrow (N\circ c)^{\cdot}(s) = \pm \dot{n}(s) \Rightarrow$

$\overset{⊛}{\Rightarrow} \lambda(s)\dot{c}(s) = \pm\dot{n}(s) \Rightarrow \lambda(s)t(s) = \pm\dot{n}(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(s)t(s) = \pm(-k(s)t(s) + \tau(s)b(s)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau(s) = 0\ \forall s \Rightarrow c(s)$ επίπεδη καμπύλη.

$\longrightarrow \longrightarrow$

(ii) Γνωρίζω τα προηγούμενα και εφαρμόζω Rodrigues.

~~[illegible]~~.

(iii) Δεν ισχύει